

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Survol historique</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Mécanique vectorielle</b>	<b>31</b>
3.1	Rappels . . . . .	31
3.1.1	Cinématique . . . . .	31
3.1.1.1	Rotation . . . . .	31
3.1.1.2	Vitesse . . . . .	41
3.1.1.3	Accélération . . . . .	44
3.1.1.4	Repère mobile . . . . .	48
3.1.1.5	Cinématique inverse . . . . .	51
3.1.2	Cinétique . . . . .	52
3.1.2.1	Quantité de mouvement . . . . .	52
3.1.2.2	Moment cinétique . . . . .	53
3.1.2.3	Tenseur d'inertie . . . . .	54
3.1.2.4	Théorème des axes parallèles . . . . .	58
3.1.2.5	Moment dynamique . . . . .	59
3.1.3	Dynamique . . . . .	61
3.1.3.1	Efforts . . . . .	61
3.1.3.2	Loi de Newton . . . . .	63
3.1.3.3	Principe fondamental . . . . .	63
3.1.3.4	Théorèmes généraux . . . . .	65
3.1.3.5	Equations d'Euler . . . . .	66
3.1.4	Energétique . . . . .	69
3.1.4.1	Energie cinétique . . . . .	69
3.1.4.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	69
3.1.4.3	Théorème de Koenig . . . . .	71
3.1.4.4	Energie potentielle . . . . .	72
3.1.4.5	Intégrale première . . . . .	72
3.1.5	Statique . . . . .	73
3.1.5.1	Principe fondamental . . . . .	73
3.1.5.2	Frottement . . . . .	77

3.1.5.3	Treillis . . . . .	77
3.1.5.4	Hyperstatisme . . . . .	79
3.1.5.5	Méthode des travaux virtuels . . . . .	80
3.2	Applications . . . . .	85
3.2.1	Pendules . . . . .	85
3.2.1.1	Pendule simple . . . . .	85
3.2.1.2	Pendule de Foucault . . . . .	86
3.2.1.3	Pendule double . . . . .	89
3.2.1.4	Chaînette suspendue . . . . .	92
3.2.1.5	Gyropendule . . . . .	98
3.2.2	Autres systèmes oscillants . . . . .	100
3.2.2.1	Barre sur un demi-cylindre . . . . .	100
3.2.2.2	Volatile suspendu . . . . .	102
3.2.2.3	Demi-cylindres superposés . . . . .	106
3.2.2.4	Gyroscope vibrant . . . . .	110
3.2.2.5	Balle rebondissante . . . . .	112
3.2.3	Toupies . . . . .	121
3.2.3.1	Toupie de Lagrange . . . . .	121
3.2.3.2	Erection d'une toupie . . . . .	128
3.2.3.3	Toupie sphérique . . . . .	132
3.2.3.4	Celt . . . . .	139
3.2.3.5	Précession des équinoxes . . . . .	150
3.2.4	Sphères . . . . .	156
3.2.4.1	Powerball . . . . .	156
3.2.4.2	Sphère de Bobylev . . . . .	159
3.2.4.3	Sphère sur un cône . . . . .	171
3.2.4.4	Sphère sur une autre . . . . .	174
3.2.4.5	Sphère céleste . . . . .	175
3.2.5	Roues . . . . .	205
3.2.5.1	Plan incliné . . . . .	205
3.2.5.2	Disque roulant . . . . .	209
3.2.5.3	Bicyclette . . . . .	216
3.2.5.4	Planche à roulettes . . . . .	221
3.2.5.5	Monorail gyrostabilisé . . . . .	228
<b>4</b>	<b>Mécanique analytique</b>	<b>235</b>
4.1	Rappels . . . . .	235
4.1.1	Généralités . . . . .	235
4.1.1.1	Coordonnées généralisées . . . . .	235
4.1.1.2	Liaisons . . . . .	236
4.1.1.3	Théorème des travaux virtuels . . . . .	236
4.1.1.4	Théorème des puissances virtuelles . . . . .	237
4.1.2	Equations de Lagrange . . . . .	237
4.1.2.1	Dérivation . . . . .	237

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.1.2.2	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	239
4.1.2.3	Principe de moindre action . . . . .	240
4.1.2.4	Lois de conservations . . . . .	241
4.1.2.5	Equations d'Euler . . . . .	244
4.1.3	Stabilité . . . . .	247
4.1.3.1	Théorème de Lejeune-Dirichlet . . . . .	247
4.1.3.2	Critère de Routh . . . . .	248
4.1.3.3	Réduction de Routh . . . . .	249
4.1.3.4	Coordonnées normales . . . . .	250
4.1.3.5	Stabilisation gyroscopique . . . . .	251
4.1.4	Equations de Hamilton . . . . .	253
4.1.4.1	Espace des phases . . . . .	253
4.1.4.2	Transformation de Legendre . . . . .	254
4.1.4.3	Equations canoniques . . . . .	256
4.1.4.4	Equation de Hamilton-Jacobi . . . . .	261
4.1.4.5	Théorème de Liouville . . . . .	265
4.1.5	Equations de Gibbs-Appell . . . . .	266
4.1.5.1	Dérivation . . . . .	266
4.1.5.2	Principe de moindre contrainte . . . . .	270
4.1.5.3	Equations d'Euler . . . . .	272
4.2	Applications . . . . .	272
4.2.1	Equations de Lagrange . . . . .	272
4.2.1.1	Sphère sur une autre . . . . .	272
4.2.1.2	Sphère de Bobylev . . . . .	273
4.2.1.3	Essieu sur un plan incliné . . . . .	276
4.2.1.4	Powerball . . . . .	280
4.2.1.5	Précession des équinoxes . . . . .	281
4.2.2	Stabilité . . . . .	284
4.2.2.1	Corps simples . . . . .	284
4.2.2.2	Hémisphères superposés . . . . .	295
4.2.2.3	Régulateur centrifuge . . . . .	303
4.2.2.4	Monorail gyrostabilisé . . . . .	307
4.2.2.5	Planche à roulettes . . . . .	309
4.2.3	Equations de Hamilton . . . . .	310
4.2.3.1	Toupie de Lagrange . . . . .	310
4.2.3.2	Pendule simple . . . . .	313
4.2.3.3	Pendule inversé . . . . .	314
4.2.3.4	Pendule double . . . . .	318
4.2.3.5	Pendule élastique . . . . .	319
4.2.4	Equations de Hamilton-Jacobi . . . . .	322
4.2.4.1	Balistique . . . . .	322
4.2.4.2	Pendule simple . . . . .	323
4.2.4.3	Pendules couplés . . . . .	324
4.2.4.4	Toupie . . . . .	327

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.2.4.5	Coin roulant . . . . .	328
4.2.5	Equations de Gibbs-Appell . . . . .	330
4.2.5.1	Pendule double . . . . .	330
4.2.5.2	Toupie de Lagrange . . . . .	331
4.2.5.3	Disque roulant . . . . .	332
4.2.5.4	Planche à roulettes . . . . .	333
4.2.5.5	Sphère sur un plan tournant . . . . .	338
<b>Bibliographie</b>		<b>340</b>
<b>Index</b>		<b>364</b>